09-19-2019

Αυτοπροσαρτημένοι γραμμ. μετασχηματισμοί: (γραμμ. αλγ.)

Έστω V, ένας $\mathbb{R}$ δ.χ. εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$.

Ένας γραμμ. μετασχηματισμός $A : V \to V$ λέγεται αυτοπροσαρτημένος ως προς το εσ. γινόμενο $\langle , \rangle$ <u>αν-ν</u> $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$, $\forall x, y \in V$

Έστω $A : V \to V$ ένας αυτοπροσαρτημένος γραμμ. μετασχ.

Ορίζω την $\beta_A : V \times V \to \mathbb{R}$, $\beta_A(x,y) = \langle Ax, y \rangle$

β_A: διγραμμ. Επιπλέον $\beta_A(x,y) = \beta_A(y,x)$.

Αν A είναι αυτοπροσαρτημένος γρ. μετασχ. η β_A είναι συμμετρική διγραμμική μορφή με αντίστοιχη τετρ. μορφή $Q_A : V \to \mathbb{R}$, $Q_A(x) = \beta_A(x,x) = \langle Ax, x \rangle$

$$\beta_A(x,y) = \frac{1}{2} \left\{ Q_A(x+y) - Q_A(x) - Q_A(y) \right\}$$

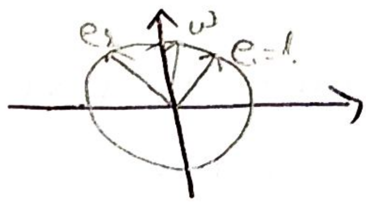
Ορ: Η Q_A καλείται θετικώς (αρνητικώς) ημιορισμένη $\Leftrightarrow Q_A(x) \geq 0, \ \forall x \in V$ $(Q_A(x) \leq 0, \forall x \in V)$

Ορ: Η Q_A καλείται θετικώς (αρνητικώς) ορισμένη και αν-ν είναι θετικώς (αρνητικώς) ημιορισμένη και ισχύει $Q_A(x)=0 \Leftrightarrow \underline{x=0}$

Λήμμα: Έστω V είναι $\mathbb{R}$ δ.χ. με $\dim V = 2$ εφοδιασμένο με εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ και $A: V \to V$ αυτοπροσαρτημένο γραμμ. μετασχ.

$$\max\{Q_A(w) \mid \|w\|=1\} = Q_A(e)$$

Αν $\|e\|=1$ τότε $Q_A(e)$ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το e.



Απόδ.

Θεωρώ ορθοκανονική βάση $\{e_1 = e, e_2\}$

Τότε αν πάρω $\|w\|=1$: $w = \cos t\, e_1 + \sin t\, e_2$, $t \in \mathbb{R}$.

Η $f(t) = Q_A((\cos t\, e_1 + \sin t\, e_1)$ έχει ολικό μέγιστο στο $t_0=0$. Από Θ. Fermat $f'(0) = 0$

$$f(t) = Q_A(\cos t\, e_1 + \sin t\, e_2) = \langle A(\cos t\, e_1 + \sin t\, e_2), \cos t\, e_1 + \sin t\, e_2\rangle$$

$$= \langle \cos t\, Ae_1 + \sin t\, Ae_2, \cos t\, e_1 + \sin t\, e_2\rangle$$

$$= \langle Ae_1, e_1\rangle \cos^2 t + \langle Ae_1, e_2\rangle \cos t \sin t + \langle Ae_2, e_1\rangle \cos t \sin t + \langle Ae_2, e_2\rangle \sin^2 t \Rightarrow$$

$$f(t) = \langle Ae_1, e_1\rangle \cos^2 t + \langle Ae_1, e_2\rangle \sin 2t + \langle Ae_2, e_2\rangle \sin^2 t.$$

$$\Rightarrow 0 = f'(0) = 2\langle Ae_1, e_2\rangle \Rightarrow \boxed{\langle Ae_1, e_2\rangle = 0}$$

$$Ae = Ae_1 = \langle Ae_1, e_1\rangle e_1 + \langle Ae_1, e_2\rangle e_2 = Q_A(e)e$$

Θεώρημα: Έστω V ένας $\mathbb{R}$ δ.χ. με $\dim V = 2$ εφοδιασμένο με εσωτ. γινόμενο $\langle , \rangle$ και $A: V \to V$ αυτοπροσαρτημένο γραμμ. μετασχ. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2\}$ του V τ.ω.: (i) $Ae_1 = \lambda_1 e_1$, $Ae_2 = \lambda_2 e_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

(ii) $\lambda_1 = \max\{Q_A(\omega) \mid \|\omega\| = 1\}$

$\lambda_2 = \pm \min\{Q_A(\omega) \mid \|\omega\| = 1\}$

Αποδ.

Θεωρώ βάση $\{e_1 = e, e_2\}$ ορθ. με $\max\{Q_A(\omega) \mid \|\omega\| = 1\} =$
$= Q_A(e) = \lambda_1$

$$Ae_2 = \langle Ae_2, e_1\rangle e_1 + \langle Ae_2, e_2\rangle e_2 = \langle e_2, Ae_1\rangle e_1 + Q_A(e_2)e_2$$

$$\Rightarrow \quad Ae_2 = Q_A(e_1)e_2$$

$\|\omega\| = 1$
$\omega = xe_1 + ye_2$

$$Q_A(\omega) = Q_A(xe_1 + ye_1) = \langle A(xe_1 + ye_2), xe_1 + ye_2\rangle$$
$$= \langle Ae_1, e_1\rangle x^2 + 2\langle Ae_1, e_2\rangle xy + \langle Ae_2, e_2\rangle y^2$$
$$= Q_A(e_1)\cancel{x}^2 + Q_A(e_2)y^2$$
$$\geq Q_A(e_2)x^2 + Q_A(e_2)y^2 = Q_A(e_2)(\cancel{x^2 + y^2})^1 = Q_A(e_2)$$

Ορίζω την συμμετρική διγραμμική μορφή.

$$B_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}.$$
$$B_p(w_1, w_2) = \langle L_p w_1, w_2 \rangle_p$$

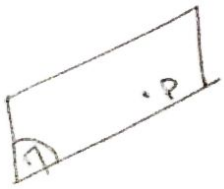
ΔΕΥΤΕΡΗ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΜΟΡΦΗ:

Ορισμός: Έστω S προσανατολίσιμη επιφάνεια. Καλούμε 2η θεμελιώδη μορφή της S στο p την τετραγωνική μορφή $II_p : T_pS \to \mathbb{R}$, $II_p(w) = \langle L_p w, w \rangle_p$, $w \in T_pS$ ($I_p : T_pS \to \mathbb{R}$, $I_p(u) = \|u\|^2 = \langle w, u \rangle_p$)

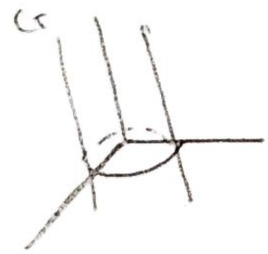
Παραδείγματα:

① Επίπεδο: $L_p = 0$, $II_p : T_p\Pi \to \mathbb{R}$, $II_p(w) = \langle L_p w, w \rangle$

$II_p = 0$, $\forall p \in \Pi$



② Κύλινδρος: $C_r : x^2 + y^2 = r^2$



$w = (w_1, w_2, w_3) \in T_pC_r$

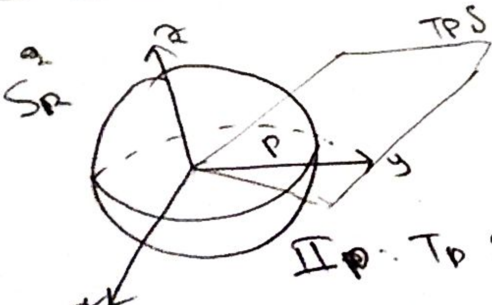
$N : C_r \to S^2$

$N(x,y,z) = -\frac{1}{r}(x,y,z)$

$L_p(w) = L_p(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{r}(w_1, w_2, 0)$

$II_p : T_pC_r \to \mathbb{R}$, $II_p(w) = \langle L_p w, w \rangle_p = \frac{1}{r}(w_1^2 + w_2^2)$

③ Σφαίρα:



S^2_R, $N : S^2_R \to S^2$

$N(x,y,z) = -\frac{1}{R}(x,y,z)$

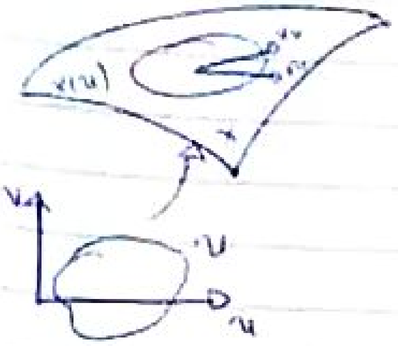
$L_p : T_pS^2_R \to T_pS^2_R$

$L_p w = \frac{1}{R} w$

$II_p : T_pS^2_R \to \mathbb{R}$, $II_p(w) = \langle L_p w, w \rangle_p = \langle \frac{1}{R} w, w \rangle_p$

$= \frac{1}{R}\langle w, w \rangle_p = \frac{1}{R} I_p(w)$, $II_p = \frac{1}{R} I_p$

Θεμελιώδη ποσά $2^{ης}$ τάξης



Ο πίνακας της II ως προς τη βάση x_u, x_v είναι $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ όπου $e, f, g : U \to \mathbb{R}$ είναι οι συναρτήσεις

$e = II(x_u) = \langle L x_u, x_u \rangle$

$f = \langle L x_u, x_v \rangle = \langle L x_v, x_u \rangle$

$g = II(x_v) = \langle L x_v, x_v \rangle$

$L x_u = -(N \circ x)_u = -N_u$

$L x_v = -(N \circ x)_v = -N_v$

$E, F, G : U \to \mathbb{R}$, $E = \|x_u\|^2$, $F = \langle x_u, x_v \rangle$, $G = \|x_v\|^2$

$$\left.\begin{aligned} e &= -\langle N_u, x_u \rangle \\ f &= -\langle N_v, x_u \rangle = -\langle N_u, x_v \rangle \\ g &= -\langle N_v, x_v \rangle \end{aligned}\right\} \text{Θεμελιώδεις ποσά } 2^{ης} \text{ τάξης}$$

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = \frac{x_u \times x_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$e = -\langle N_u, x_u \rangle = -(\cancel{\langle N, x_u \rangle})_u + \langle N, x_{uu} \rangle$$

Λήμμα: Τα θεμελιώδη ποσά $2^{ης}$ τάξης ως προς σύστημα συντεταγμένων x είναι οι συναρτήσεις $e, f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$e = \langle x_{uu}, N \rangle$

$f = \langle x_{uv}, N \rangle$

$g = \langle x_{vv}, N \rangle$

Δεύτερη θεμελιώδης μορφή γραφημάτων

Έστω Γ_h το γράφημα μιας λείας συνάρτησης $h: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\Gamma_h = \{(x,y,h(x,y)) \,/\, (x,y) \in U\}$. Θεωρώ το σύστημα συντεταγμένων $X: U \to \Gamma_h$

$X(x,y) = (x,y,h(x,y))$

$$N = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$$

$X_x = (1,0,h_x)$, $X_{xx} = (0,0,h_{xx})$

$X_y = (0,1,h_y)$, $X_{yy} = (0,0,h_{yy})$

$X_{xy} = (0,0,h_{xy})$

$$e = \langle X_{xx}, N \rangle = \frac{h_{xx}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$$

$$f = \langle X_{xy}, N \rangle = \frac{h_{xy}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$$

$$g = \langle X_{yy}, N \rangle = \frac{h_{yy}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$$

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\|\operatorname{grad} h\|^2 + 1}} \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\kappa = \frac{f''}{\left(\sqrt{f'^2 + 1}\right)^3}$$